

Harmonikale und geometrische Strukturen in unserem Planetensystem

Vortrag auf dem Symposion
"Vielfalt und Einheit in der Harmonik"
Nürnberg, 01. - 02. Mai 2010

1. „Sphärenmusik“

Die Vorstellung von einem harmonisch geordneten Kosmos durchzieht die Geistesgeschichte der Menschheit seit mehreren Jahrtausenden. Pythagoras vermochte der Legende nach, die „Sphärenmusik“ zu erlauschen; seine Entdeckung, daß konsonante musikalische Intervalle einfachen Zahlenverhältnissen entsprechen, wurde u.a. von Platon auf die antiken Modelle vom Aufbau des Kosmos übertragen. Zu Beginn der wissenschaftlich orientierten Neuzeit brachte Johannes Kepler neue Impulse in die alten intuitiven Vorstellungen; er war es, der allen moderneren Vorstellungen von Sphärenharmonie das Fundament gegeben hat. Mit Hilfe der von ihm entdeckten Planetengesetze versuchte er, die überkommenen Ideen auf eine solide Grundlage zu stellen. Die himmlische Musik, der Johannes Kepler auf der Spur war, war für ihn „nur im Geiste vernehmbar“, d.h. es ging ihm darum, eine möglichst genaue Übereinstimmung zwischen musikalischen Intervallen und planetarischen Verhältnissen zu finden. Er glaubte, diese in den extremen Winkelgeschwindigkeiten der Planetenbahnen entdeckt zu haben. In Keplers Worten sind dies die von der Sonne aus gesehenen Winkel, welche die Planeten in gleichen Zeiteinheiten im Aphel und Perihel (sonnenfernster und -nächster Punkt der Ellipsenbahn) zurücklegen. Nach ihm wurden andere Parameter herangezogen, die die genannte Bedingung erfüllen sollten; Hans Kayser z.B. entwickelte eine planetarische Tonleiter aus den Logarithmen der Abstände, Thomas Michael Schmidt aus den synodischen Umlaufzeiten und andere mehr. All den in der Literatur zu findenden Bemühungen ist allerdings gemeinsam, daß sie nicht untersuchen, ob die gefundenen Übereinstimmungen im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung signifikant sind. Mit anderen Worten muß die Frage gestellt werden, ob und wie stark vermeintliche planetarische Harmonien von einer zufälligen Verteilung abweichen. Denn in einer Reihe von Verhältniszahlen, die zwischen Parametern wie Abständen, Geschwindigkeiten etc. gebildet werden können, wird es immer einige geben, die relativ nahe bei musikalischen Intervallen wie 3:2, 4:3 usw. liegen. Doch soll die mathematische Seite dieses Themas an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden, eine einfache Graphik kann sehr schnell verdeutlichen, um was es dabei geht.

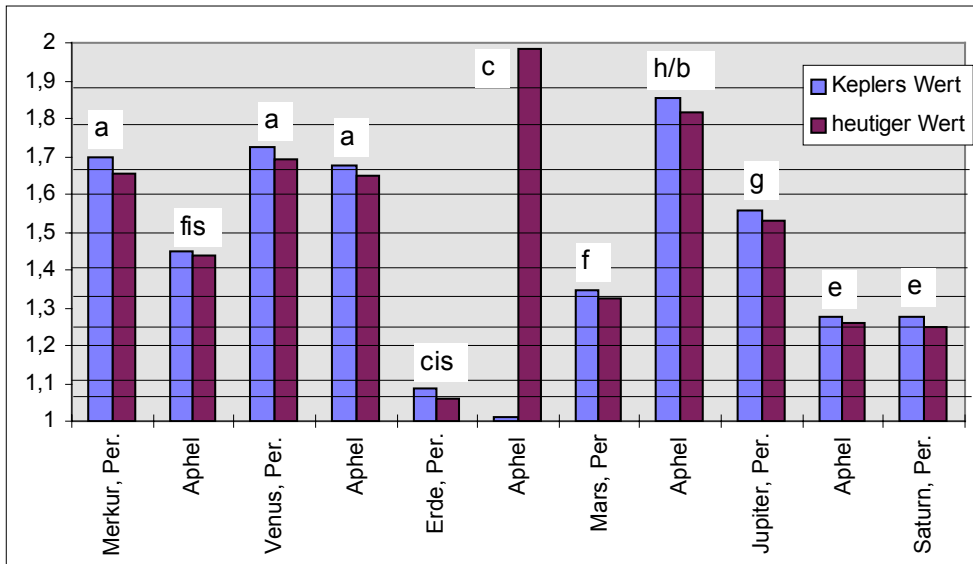


Abbildung 1.1 Verhältnisse der Winkel nach Joh. Kepler, bezogen auf Saturn im Aphel (= c); musikalische Intervalle sind als horizontale Linien eingetragen. © Keplerstern Verlag

Aufgetragen sind hier die Verhältnisse der Winkel aus Johannes Keplers genannter Zuordnung. Die horizontalen Linien geben die musikalischen Tonverhältnisse an, und man sieht auf den ersten Blick, daß nur etwa die Hälfte der planetarischen Intervalle den musikalischen nahekommen. Ohne weitere Berechnungen ist es offensichtlich, daß damit keine besondere Abweichung von einer zufälligen Verteilung zum Tragen kommen kann. Und auch bei der Analyse der anderen genannten Himmelsharmonien ergibt sich kein wesentlich günstigeres Bild, statistisch signifikante Übereinstimmungen mit musikalischen Intervallen sind leider nirgendwo zu finden. Doch Keplers Irrtum in der konkreten Ausgestaltung seiner Grundideen ist immerhin verzeihlich, da es zu seiner Zeit noch keine Wahrscheinlichkeitsrechnung gab. Zum weiteren forderte Kepler in seiner *Harmonice Mundi* ausdrücklich dazu auf, ein „den Himmelsbewegungen besser entsprechendes System“ (als das seine) aufzubauen.

Aus den angedeuteten Analysen geht scheinbar hervor, daß die Ablehnung der „Spärenharmonie“ durch die moderne Astronomie zu recht besteht (Keplers diesbezügliche Vorstellungen werden in der Fachliteratur in der Regel als „schöne Träumerei“ o.ä. bezeichnet). Doch kam bisher - soweit dem Autor bekannt - noch niemand auf die Idee, die kleinen Halbachsen der elliptischen Planetenbahnen in die Untersuchungen einzubeziehen. Zu bestimmten Zeitpunkten haben die Planeten auf ihren Bahnen um die Sonne exakt den Abstand ihrer kleinen Halbachse b von dem Zentralgestirn. Ihre Geschwindigkeit kommt dabei fast haargenau dem arithmetischen Mittel der extremen Geschwindigkeiten gleich (die extremen Geschwindigkeiten ergeben sich im Aphel, dem sonnenfernsten, und im Perihel, dem sonnennächsten Punkt der Bahn). Setzt man nun die Geschwindigkeiten im Abstand der kleinen Halbachse (Geschwindigkeit „in b “ in der Abbildung 1.2) und diejenigen im Aphel in Bezug, ergeben sich hochsignifikante Übereinstimmungen mit musikalischen Intervallen.

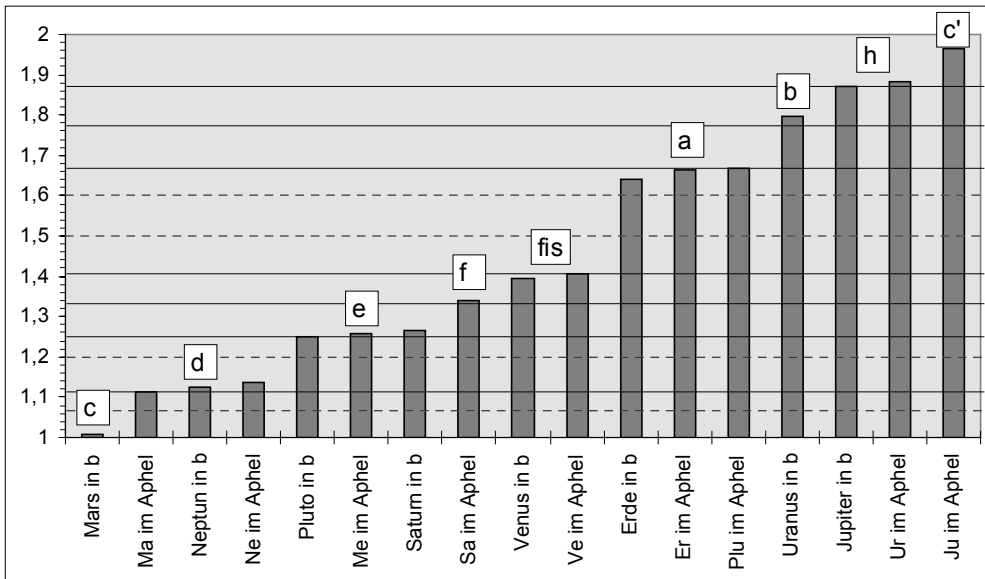


Abbildung 1.2 Intervalle der Geschwindigkeiten, bezogen auf Merkur 'in b' als Grundton (= c), transponiert in eine Oktave. Musikalische Intervalle sind durch die horizontalen Linien markiert. © Keplerstern Verlag

13 von 17 möglichen Proportionen liegen nun dicht bis sehr dicht an den musikalischen Verhältnissen. Mit entsprechenden statistischen Verfahren läßt sich errechnen, daß diese Häufung lediglich mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 1:10.000 zufälliger Natur sein könnte (berücksichtigt man, daß es etwa 10 verschiedene Möglichkeiten gibt, Verhältnisse verschiedener Parameter zu bilden, verbleibt immer noch ein Wert von 1:1.000). Die uralte Idee der Sphärenharmonie und insbesondere die Grundgedanken Johannes Keplers haben damit zum ersten Mal eine tatsächliche, im Prinzip von jedermann nachprüfbar Bestätigung gefunden. Es ist dabei nicht von einem echten Beweis die Rede, welche mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung eben nicht erbracht werden kann. Gleichwohl kann man anderslautend festhalten, daß bei der Formierung unseres Planetensystems mit mindestens 99,9 %-iger Wahrscheinlichkeit ein Einfluß gewirkt hat, der zu einer den harmonisch-musikalischen Zahlenverhältnissen entsprechenden Anordnung der Geschwindigkeiten geführt hat.

Und auch im Mikrokosmos ist eine ähnliche Strukturiertheit nach musikalischen Verhältnissen anzutreffen. Setzt man nämlich die Ruhemassen der 15 langlebigsten Elementarteilchen auf die gleiche Weise in Beziehung, ergibt sich das folgende Bild. Die Wahrscheinlichkeit, daß es sich um eine rein zufällige Übereinstimmung handeln könnte, liegt dieses Mal bei ca. 1:2000.

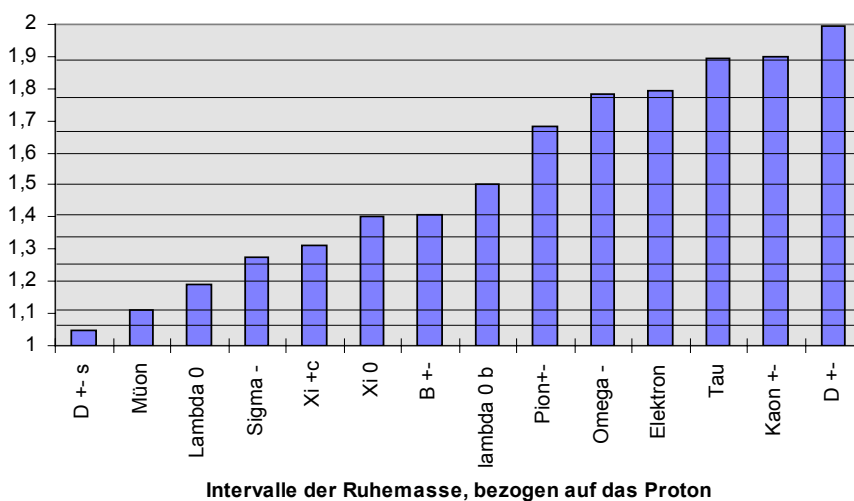


Abbildung 1.3 14 Intervalle der Ruhemassen der 15 langlebigsten Elementarteilchen (transponiert in eine Oktave), jeweils bezogen auf das Proton; musikalische Intervalle sind durch horizontale Linien markiert. © Keplerstern Verlag

2. Geometrische Anordnung der Planeten

So wie die Idee von einer Sphärenharmonie seit Jahrtausenden in der Menschheit verankert ist, so wurde seit wohl ebenso langer Zeit ein Zusammenhang zwischen Geometrie und den himmlischen Verhältnissen erahnt. Platon brachte die fünf existierenden und nach ihm benannten regelmäßigen Körper mit den Elementen Feuer, Wasser, Erde, Luft und himmlisch-ätherische Substanz in Verbindung. Letztere ordnete er dem Dodekaeder zu, jener Figur, die von zwölf Fünfecken umgrenzt wird. Auch in geometrischer Hinsicht war es erst Johannes Kepler, der die alten Vorstellungen knapp zwei Jahrtausende später weiterentwickelte. Ziemlich zu Beginn seiner Suche nach der Ordnung im Sonnensystem kreierte er sein bekanntes Modell, wonach die Anordnung der sechs zu seiner Zeit bekannten Planeten durch die platonischen Körper geregelt wird. So entspricht beispielsweise das Verhältnis der Radien von Um- und Inkugel des Dodekaeders (allerdings nur sehr grob) demjenigen der mittleren Sonnenabstände bzw. der großen Halbachsen der Ellipsenbahnen von Mars und Erde.

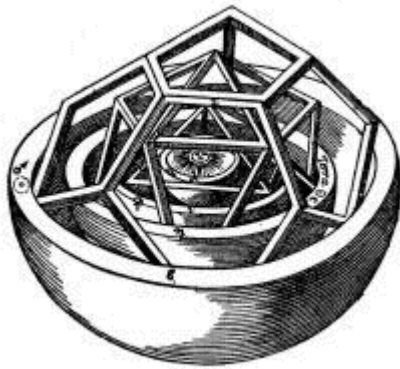


Abbildung 2.1 Darstellung aus *Mysterium Cosmographicum (Das Weltgeheimnis)* von Johannes Kepler

Die Strukturiertheit des ganzen Systems, so wie sie sich in der *Signatur der Sphären* kundtut, wird jedoch von den kleinen Halbachsen b vorgegeben, denen ja schon bei den Harmonien der Geschwindigkeiten eine zentrale Bedeutung zukam. Am auffälligsten ist zunächst, daß erster und vierter Planet, sowohl von innen als auch von außen gezählt, bezogen auf ihre kleinen Halbachsen im Verhältnis 4:1 stehen. Erster und sechster Planet, wiederum von innen und von außen gerechnet, weisen die Proportion 25:1 auf. Dadurch ergibt sich eine sehr klare übergeordnete Struktur, die von weiteren Verhältnissen kleiner ganzer Zahlen untergliedert wird. Diese Ordnung ist in der folgenden Abbildung durch entsprechende Kreise symbolisiert. Die Abweichungen von den realen Werten betragen jeweils nur wenige Promille, außer bei den Intervallen 8:3 bzw. 3:2, wo sie etwas über ein Prozent ausmachen. (Die genauen Werte finden sich in dem Buch *Die Signatur der Sphären*, S. 23 ff.)

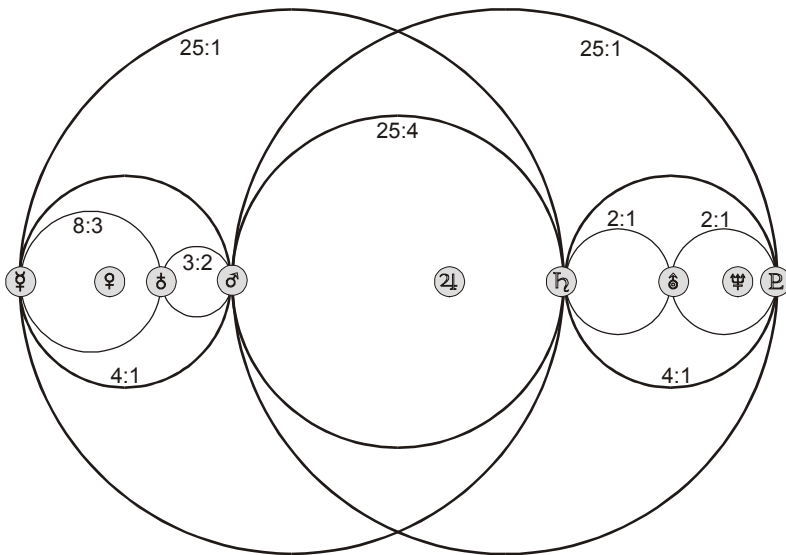
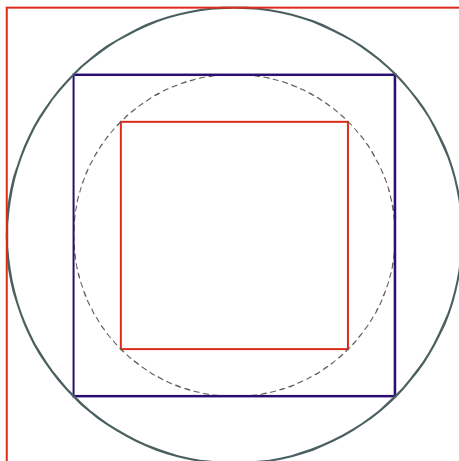


Abbildung 2.2 Annäherung an die Intervalle der kleinen Halbachsen der Planeten. Von links nach rechts: Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun, Pluto. © Keplerstern Verlag

Es ist dies eine so bestechend klare und einfache Anordnung, daß man sich ein weiteres Mal wundern muß, warum diese bisher noch nirgendwo erwähnt worden ist (nach Kenntnissen des Autors jedenfalls). Es ist wie eine Spiegelung um Jupiter, das größte Mitglied der planetarischen Gemeinschaft. Er, die Venus und Neptun sind in die gezeigte Ordnung allerdings noch nicht integriert. Dies ermöglicht jedoch eine geometrische Darstellung mit Hilfe der einfachsten regelmäßigen Figuren: Kreis, Quadrat, Dreieck. Denn die Proportionen 2:1 und 4:1 ergeben sich auch durch die Flächenverhältnisse von Um- und Inkreis eines Vier- bzw. Dreieckes. Der Kreis teilt dabei Proportionen von der Gestalt $4/\pi$, $\pi/2$ etc. ab. Beispielfhaft für die 4 äußeren Planeten kommt man so zu folgender Anordnung:



äußeres Quadrat: Pluto
 Kreis: Neptun
 mittleres Quadrat: Uranus
 inneres Quadrat: Saturn

	planetar. Verhältnis	geometr. Verhältnis	Abweichung (%)
Ur/Sa	2,012	2,000	0,608
Ne/Ur	1,568	1,571	0,156
Pl/Ne	1,271	1,273	0,181
Pl/Sa	4,011	4,000	0,270

Abweichungen der planetarischen von den geometrischen Flächen-Intervallen:

0,16 - 0,61 %, im Mittel 0,31 %

Abbildung 2.3 Geometrische Annäherung an die Verhältnisse der kleinen Halbachsen im äußeren Planetensystem

Man wird vielleicht zunächst überrascht sein, drei der Planetenbahnen als Quadrate wiederzufinden. Es handelt sich jedoch um die Darstellung des Ordnungsprinzipes von Strecken, den kleinen Halbachsen. Deren Verhältnisse sind hier wie die Flächen von Vierecken bzw. der eines Kreises aufeinander bezogen. Warum aber spielen die kleinen Halbachsen in der Anordnung der Planetenbahnen die entscheidende Rolle und warum sollen sich deren Proportionen nach Flächenverhältnissen gestalten? Eine Antwort könnte darin zu finden sein, daß die kleinen Halbachsen das geometrische Mittel von Aphel- und

Periheldistanz bilden, für eine geometrische Anordnung insofern prädestiniert sind. Wenn dann die Entfernungsmaße nach Flächenverhältnissen bestimmt sind, ergibt sich nach den Keplerschen Gesetzen - zumindestens trifft das für Kreise zu -, daß die Geschwindigkeiten etwa den Radien und die Umlaufzeiten den zu bildenden Kugeln entsprechen.

Doch wie dem auch sei, es wird hier keine neue physikalische Theorie aufgestellt, sondern eine Beschreibung von sehr bemerkenswerten Phänomenen geliefert. Denn auf ähnliche Weise lassen sich sämtliche Verhältnisse der kleinen Halbachsen geometrisch erfassen (im inneren Planetensystem tritt noch für eine Hilfskonstruktion das Sechseck hinzu):

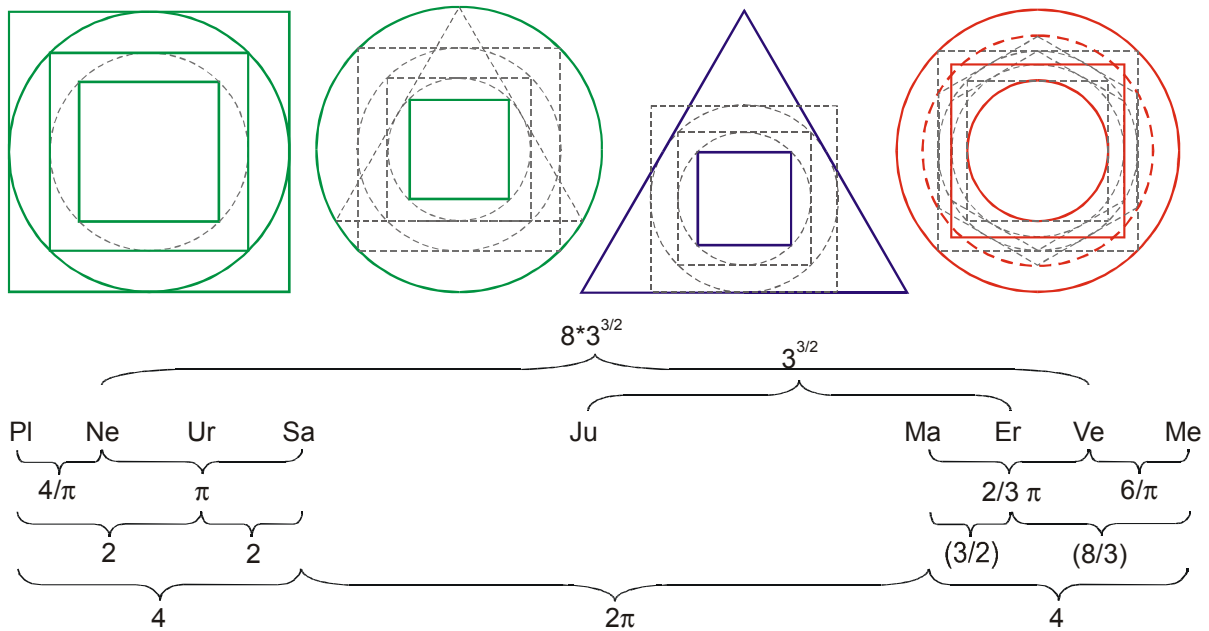
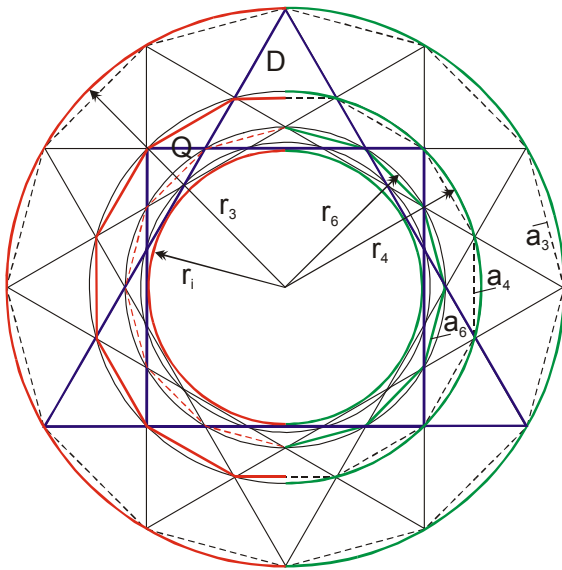


Abbildung 2.4 Zusammenstellung der Proportionen der kleinen Halbachsen als Flächenverhältnisse in Kreis-, Quadrat- und Dreieck-Konstruktionen. Von links nach rechts: äußerer Bereich, Saturn/Mars, Jupiter/Erde, innerer Bereich. © Keplerstern Verlag

Mit geeigneten statistischen Methoden läßt sich nachweisen, daß die Wahrscheinlichkeit für die zufällige Bevorzugung von Proportionen, die sich aus diesen einfachen Konstruktionsprinzipien ergeben, äußerst gering ist (< 1:100.000). Zudem läßt sich auch die Sonne (über ihren Durchmesser) in diese Darstellungsweise einbeziehen. Am erstaunlichsten ist aber vielleicht, daß die angeführten Proportionen genau jene sind, die in den Flächenverhältnissen eines Zwölfsterns auftreten.



Die Indizes stehen für die von den Strahlen des Zwölfsterns gebildeten Eckfiguren, d.h. 3: Dreieck, 4: Viereck, 6: Sechseck. r bezeichnet die Umkreisradien (bis auf r_i), a die Zwölfeckseiten. Die entsprechenden Flächen der Kreise werden mit F benannt, die der eingeschriebenen Zwölfecke mit A . Dann ergibt sich:

$$\frac{A_6}{F_i} = \frac{4}{\pi} (Pl / Ne) \quad \frac{F_4}{A_6} = \frac{\pi}{2} (Ne / Ur)$$

$$\frac{F_4}{F_i} = 2 (Ur / Sa) \quad \frac{F_3}{F_i} = 4 (Pl / Sa, Ma / Me)$$

$$\frac{A_4}{F_i} = \frac{6}{\pi} (Ve / Me) \quad \frac{F_3}{A_4} = \frac{2}{3} \pi (Ma / Ve)$$

$$\frac{A_4}{A_6} = \frac{3}{2} (Ma / Er) \quad \frac{F_3}{A_6} * 2 = 2\pi (Sa / Ma)$$

Abbildung 2.5 Die den Intervallen der kleinen Halbachsen entsprechenden Flächenverhältnisse im Zwölfstern

Johannes Keplers Grundidee, daß in unserem Sonnensystem eine besondere geometrische Ordnung vorhanden ist, hat sich damit, wenn auch in abgewandelter Form, auf das Schönste bestätigt. Das umfassendere Ziel seiner „Harmonice Mundi“ (Weltharmonik) aus dem Jahre 1618 bestand darin aufzuzeigen, daß die Grundlagen von Geometrie, musikalischer Harmonie und Astronomie im wesentlichen eins sind oder, anders formuliert, die unterschiedlichen Seinsbereiche von den gleichen schöpferischen Prinzipien durchwirkt werden. Das, was die Welt im Innersten zusammenhält, sind für Kepler letztlich geometrische Urbilder: göttliche Gedanken, die dem Aufbau der Musik und des Kosmos zugrunde liegen. In der menschlichen Seele sind sie ebenfalls als Archetypen verankert, wodurch es uns erst möglich wird, die Harmonie in den verschiedenen Bereichen zu erkennen und miteinander in Beziehung zu setzen.

3. Spiel der Bewegungen

Auf dieses umfassende Thema wird in dem Buch "Die Signatur der Sphären" ausführlich eingegangen. Um diesen Vortrag abzurunden, soll hier aber zumindest ein Beispiel vorgestellt werden, das zudem frappierende Zusammenhänge zu der behandelten geometrischen Anordnung aufweist.

Die Bewegungsbeziehung von jeweils drei Planeten läßt sich auf mehrere Weisen geometrisch abbilden. Dabei werden jetzt z.B. aus der Sicht eines der drei Wandelsterne die Stellungen des zweiten fortlaufend aufgetragen, wenn dieser eine Konjunktion mit dem dritten hat (eine prinzipiell gleichartige Figurenbildung entsteht auch heliozentrisch). Somit erhält man gleichsam geometrische Gesamtbilder der gravitativen Wechselwirkungen zwischen je drei Planeten. In der Vielzahl der möglichen Konstellationen aller neun Planeten des Sonnensystems treten erstaunlicherweise alle Zahlen bis zur Zwölf genau einmal auf. Die wohl eindrucksvollste Gestaltbildung ergibt sich in dem Verhältnis der drei massivsten Planeten Jupiter, Saturn und Neptun. Ihr Zusammenwirken ist für die Langzeitstabilität des Gesamtsystems von besonderer Bedeutung.

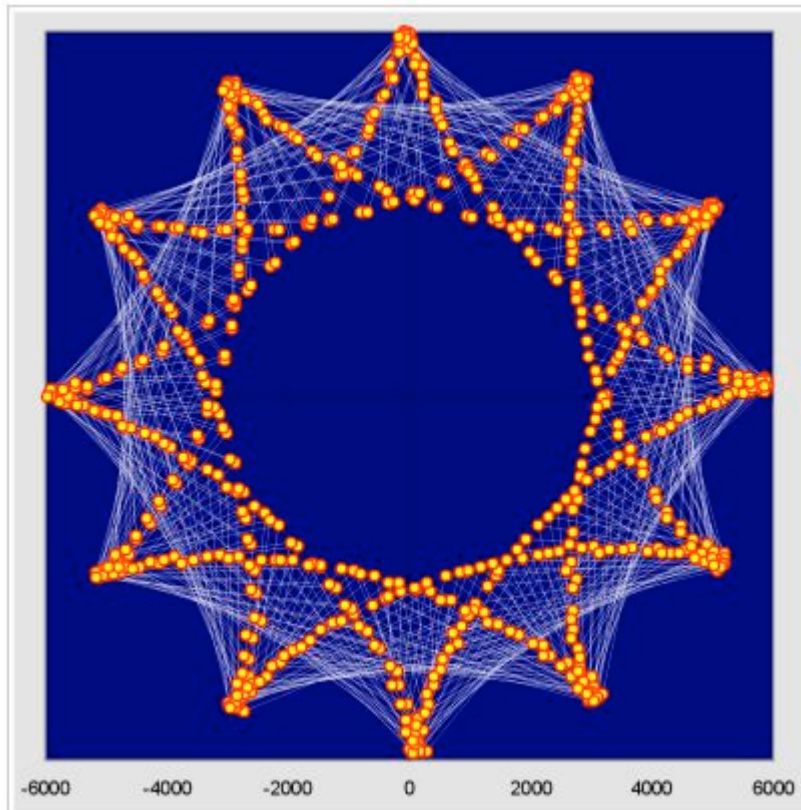


Abbildung 3.1 Neptun aus Saturn-zentrierter Sicht bei Jupiter/Neptun-Konjunktionen, 700 mal, Zeitraum ca. 8947 Jahre. © Keplerstern Verlag

Im äußeren Planetensystem, im Raum, der an die Sterne mit ihren Tierkreiszeichen grenzt, wird somit die von alters her und in verschiedenen Kulturen dem Himmel in der einen wie der anderen Bedeutung zugeordnete Symbolzahl vor unser Auge und unseren Sinn gestellt. In heliozentrischer Sichtweise ergäbe sich auch in diesem Fall eine nach der Zahl Zwölf geordnete, wenngleich nicht ganz so ausdrucksstarke Sternfigur. In der dargestellten planetozentrischen Graphik zeichnen die Verbindungslinien der Planetenpositionen zwei Sechsecke, die Abfolge der Stellungen selbst ordnet sich - wie von Zauberhand geführt - in drei viereckigen sternähnlichen Gebilden an. Diese Einzelfigur nennt man Astroide. Drei Astroiden verweben sich zu einem Zwölfstern und zusammen mit den Linien-Figuren entsteht ein geometrischer Ausdruck der Vollkommenheit, der fast wie Musik in das menschliche Innere zu dringen vermag.

Der Zwölfstern kann somit als ein Archetypus im Sinne Johannes Keplers bezeichnet werden, der sowohl der Anordnung der Planeten als auch ihren Bewegungsbeziehungen zugrunde liegt. Mit einem Kepler-Zitat soll daher auch dieser Vortrag geschlossen werden.

„Doch wozu viele Worte? Die Geometrie, vor der Entstehung der Dinge von Ewigkeit her zum göttlichen Geist gehörig ..., hat Gott die Urbilder für die Erschaffung der Welt geliefert und mit dem Bild Gottes ist sie in den Menschen übergegangen, also nicht erst durch die Augen in das Innere aufgenommen worden.“

Johannes Kepler, Weltharmonik, S. 214